13. ročník, úloha IV . P ... *jablko nepadá daleko od baobabu* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 49 studentů)*

Představme si baobab, který roste na rovníku, na jeho nejvyšší větvi ve výšce h je baobabí jablko. Jablko se rozhodne, že spadne. Spočtěte, jak daleko od kmene dopadne.

Řešení jedna: Dívá-li se na situaci pozorovatel z inerciální soustavy nespojené s povrchem Země, vidí, že ve výšce h letí jablko rychlostí $\omega(R_z+h)$ ve směru rovnoběžně s povrchem (ω je úhlová rychlost rotace Země). Povrch se pohybuje v témže směru rychlostí ωR_z. Rozdíl je tedy ωh. Jablko letí dobu $t=\sqrt{2h/g}$ a dopadne tedy ve vzdálenosti $s=\omega h\sqrt{2h/g}$ od kmene.

Řešení dva: Díváme-li se na situaci ze soustavy spojené s povrchem Země, zdají se nám nehybné předměty, které ve výšce x letí rychlostí $\omega(R_z+x)$. Jablko letí stále $\omega(R_z+h)$ a tedy vzhledem k pozorovateli na Zemi rychlostí $\omega(h-x)$. Pro x platí $x=h-gt^2/2$ a tedy $v=\omega g t^2/2$. Po zintegrování (kdo neví, co to je, nechť přijme, že plocha pod grafem funkce $y=x^2$ je $x^3/3$) vyjde $s=(\omega h/3)\sqrt{2h/g}$.

Na vás je, abyste rozhodli, který z výsledků je správně, a opravili chybný postup.

Opravíme nejprve chybnou úvahu v řešení jedna. Představme si tyč kolmou na povrch, z jejíhož konce ve výšce h padá jablko. Povrch Země letí v horizontálním směru (dále budeme-li mluvit o rychlosti, myslíme tím její průmět do tohoto směru, nebude-li řečeno jinak) rychlostí ωR_z (kde ω je úhlová rychlost rotace Země). Konec tyče (resp. jablko před pádem) letí rychlostí $\omega(R_z+h)$. V zadání jsme postupovali následovně: Rozdíl rychlostí je stále ωh, doba pádu t, a tedy posunutí od dolního konce tyče $\omega h t$. To by ovšem znamenalo, že v každé výšce (kupříkladu i na začátku pádu) je rozdíl rychlosti jablka a části tyče, kolem níž právě prolétá, ωh, což viditelně není. Ve výšce x nad povrchem je rychlost odpovídající části tyče $\omega(R_z+x)$, rychlost jablka stále $\omega(R_z+h)$, rozdíl je tedy $\omega(h-x)$, což odpovídá řešení dva v zadání. Ke stejné opravě řešení jedna lze dospět i úvahou využívající faktu, že úhlová rychlost jablka ve výšce x je

$$\omega_x^* = \frac{\omega(R_z+h)}{R_z+x} \approx \omega\left(1+\frac{h}{R_z}\right)\left(1-\frac{x}{R_z}\right) \approx \omega\left(1+\frac{h-x}{R_z}\right).$$

Zde (a i v pozdějším textu) využíváme faktu, že pro $h/R_z \ll 1$ dostatečně přesně platí $(1+h/R_z)^{-1} \approx (1-h/R_z)$. Rozdíl vzdáleností po dopadu pak vyjde

$$s = R_z\Delta\varphi = R_z\int_0^t(\omega_x^*-\omega)d\tau = \omega\int_0^t(h-x)d\tau = \frac{\omega g t^3}{6} = \frac{\omega h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,, \qquad (1)$$

neboť $h-x=g\tau^2/2$ je délka volného pádu za čas τ.

Nyní by se tedy zdálo, že řešení dva je správně. Ale není tomu tak. Dosud jsme uvažovali, že vodorovná rychlost jablka je $\omega(h+R_z)$ nezávisle na výšce x, ve které se právě během pádu nachází. Kdyby toto platilo, nemohla by krasobruslařka dělat svoje piruety, neutronové hvězdy by nerotovaly tak úžasně rychle a pan Kepler by neodvodil svůj druhý zákon nebeské mechaniky. Díky izotropii prostoru platí totiž zákon zachování momentu hybnosti, který říká, že v soustavě bez vnějších momentů sil zůstává moment hybnosti konstantní. Počáteční moment hybnosti jablka $L=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}|=m\omega(R_z+h)^2$ se tedy v průběhu pohybu zachovává, a proto pro úhlovou rychlost ve výšce x platí

$$\omega_{jx} = \left[\frac{R_z+h}{R_z+x}\right]^2\omega \approx \left[\left(1+\frac{h}{R_z}\right)\left(1-\frac{x}{R_z}\right)\right]^2\omega \approx \left(1+2\,\frac{h-x}{R_z}\right)\omega\,.$$

Stejným postupem jako v (1) se dobereme konečně ke správnému výsledku $s=2\omega h/3\sqrt{2h/g}$

Ještě odvodíme jeden důsledek našich úvah. Rozdíl rychlosti jablka a tyče ve výšce x je

$$v = (\omega_{jx} - \omega)(R_z + x) \approx 2\,\frac{h - x}{R_z}(R_z + x)\omega \approx 2\omega(h - x)\,.$$

V čase τ od začátku pádu se tedy jablko vzhledem k tyči pohybuje rychlostí $v = \omega g \tau^2$. Pozorovatel, který stojí na zemi pod tyčí a neví nic o otáčení Země, by toto nedokázal vysvětlit. Zdálo by se mu, že na jablko působí nějaká podivná síla o velikosti $F = m\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}\tau = 2m\omega g\tau = 2m\omega v^*$, kde v^* je svislá rychlost pádu. My ale víme, že to je zdánlivá Coriolisova síla, která působí na tělesa v neinerciálních rotujících soustavách.

A na závěr trocha statistiky: 20 (19) řešitelů se domnívalo, že správně je řešení jedna (dva), dostali celkem 5 (39) bodů. 10 řešitelů tvrdilo, že obě řešení jsou špatně, na správný důvod ovšem přišli jen čtyři z nich, z čehož jen *Honza Houštěk* a *Miroslav Hejna* dospěli ke správnému výsledku.

Lenka Zdeborová

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.