13. ročník, úloha IV . 1 ... *nabité kuličky* *(4 body; průměr ?; řešilo 48 studentů)*

Tři stejné kuličky o hmotnosti m, nabité nábojem q, jsou spojeny lehkými neroztažitelnými nitěmi tak, že tvoří rovnostranný trojúhelník o straně délky d. Pokud jednu z nití přestřihneme, soustava se začne pohybovat. Určete maximální rychlost „prostřední“ kuličky během nastalého pohybu.

Zvolme soustavu souřadnic následujícím způsobem: osu x ve směru přestřižené nitě a osu y kolmou na osu x a procházející „prostřední“ kuličkou. Osu z není nutné uvažovat, neboť se jedná o rovinný problém. Dále vidíme, že pohyb kuliček bude symetrický vůči ose y. Velikosti složek rychlosti „postranních“ kuliček označme v_x ve směru osy x a v_y ve směru osy y. „Prostřední“ kulička se bude pohybovat v ose y rychlostí v. Okamžitou vzdálenost „postranních“ kuliček označme l.

Při pohybu kuliček se bude zachovávat jejich celková energie, neboť elektrostatické pole je konzervativní a celková vykonaná práce tahových sil nití je nulová

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{1}{2}mv^2 + m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

Dále platí zákon zachování hybnosti soustavy kuliček, který má ve směru osy y tvar (kuličky se ve směru osy y přibližují)

$$2mv_y = mv.$$

Dosazením za v_y ze zákona zachování hybnosti do zákona zachování energie dostaneme

$$\frac{3}{4}mv^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{l}\right) - mv_x^2.$$

Vidíme tedy, že „prostřední“ kulička bude mít maximální rychlost v okamžiku, kdy jsou všechny kuličky v přímce ($l = 2d$ a $v_x = 0$)

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 md}}.$$

Po dosažení maximální rychlosti se rychlost „prostřední“ kuličky začne zmenšovat a kulička se zastaví v okamžiku, kdy kuličky budou tvořit opět vrcholy rovnostranného trojúhelníku o straně délky d. Soustava se pak začne pohybovat stejným způsobem jako na začátku pouze v opačném směru a dostane se tak do původního stavu. Pohyb soustavy je tedy periodický. Někteří řešitelé chybně uvedli, že výsledný pohyb soustavy bude harmonický. Pohyb je harmonický pouze v případě, že potenciální energie je tvaru $E_p = kx^2$ (odpovídající síla je pak $F = -2kx$), kde k je konstanta a x výchylka z rovnovážné polohy. To však v našem případě není splněno.

V našem řešení jsme předpokládali, že elektromagnetické pole v každém okamžiku odpovídá elektrostatickému poli. Ve skutečnosti však vlivem pohybu kuliček vzniká také pole magnetické (pohyb nabitých částic odpovídá elektrickému proudu). Kuličky se pohybují se zrychlením. Dochází tedy k vyzařování elektromagnetických vln na úkor mechanické energie kuliček. To znamená, že pohyb kuliček bude tlumen a kuličky se zastaví v rovnovážné poloze, což je poloha, kdy kuličky leží v přímce. Vliv uvedených efektů roste s rychlostí kuliček a s frekvencí jejich pohybu. Budou-li rychlosti kuliček podstatně menší než rychlost světla a frekvence jejich pohybu nebude příliš velká, pak lze uvedené efekty zanedbat.

Několik řešitelů uvažovalo také gravitační síly mezi kuličkami. Gravitační síly musí být menší než elektrické. V opačném případě by totiž došlo ke zhroucení kuliček do těžiště rovnostranného trojúhelníku ještě před přestřižením nitě. V tomto případě je postup zcela stejný — stačí nahradit potenciální energii systému kuliček výrazem

$$E_p = \left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} - \varkappa m^2 \right) \frac{1}{l}.$$

V několika došlých řešeních bylo chybně užito vztahu $v = at$, kde v znamená rychlost, a zrychlení a t čas. Tento vztah platí pouze v případě, že zrychlení a je *konstantní*. Někteří do tohoto vztahu dosazovali jakési střední hodnoty. To je možné, ale dosazená střední hodnota musí být *časová*. Časovou střední hodnotu zrychlení však lze určit pouze ze známé časové závislosti zrychlení. Podobně je tomu i u ostatních vztahů tohoto typu (například $W = Fs$ nebo $s = vt$). Tyto problémy měli řešitelé, kteří úlohu řešili pomocí sil, neboť pohybové rovnice jsou v tomto případě poměrně složité diferenciální rovnice, které se řeší integrací na zákon zachování energie.

Někteří řešitelé neznali správný vztah pro potenciální energii soustavy bodových nábojů (většinou jim vycházela potenciální energie dvojnásobná, než je ve skutečnosti). Odvoďme si tedy správný vzorec. Uvažujme soustavu N bodových nábojů. Poloha i-tého náboje je $\boldsymbol{r}_i$ a hodnota jeho náboje Q_i. Síla, kterou působí j-tý náboj na i-tý, je pak dána vztahem

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^3} \boldsymbol{r}_{ij},$$

kde $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$. Z tohoto vztahu ihned vidíme, že $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$, což rovněž plyne ze zákona akce a reakce.

Nechť se polohy nábojů změní o velmi malé $\Delta\boldsymbol{r}_i$: $\Delta r_i \ll r_{ij}$. Elektrické síly pak vykonají práci ΔW, pro kterou platí

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} \right) \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \Delta\boldsymbol{r}_j = \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot (\Delta\boldsymbol{r}_i - \Delta\boldsymbol{r}_j)\,.$$

Protože platí, že $\Delta\boldsymbol{r}_{ij} = \Delta\boldsymbol{r}_i - \Delta\boldsymbol{r}_j$, lze vztah pro ΔW dále upravit

$$\Delta W = \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \Delta\boldsymbol{r}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i<j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^3} \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \Delta\boldsymbol{r}_{ij}.$$

Uvažujme vektor $\boldsymbol{r}$. Pokud k tomuto vektoru přičteme vektor $\Delta\boldsymbol{r}$, pak dostaneme vektor $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{r}$ označme R. Velikost vektoru $\boldsymbol{r}'$ zapišme jako $R + \Delta R$. Pokud je splněna nerovnost $\Delta r \ll R$, potom platí

$$R^2 + 2R\Delta R + (\Delta R)^2 = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}' = R^2 + 2\boldsymbol{r} \cdot \Delta\boldsymbol{r} + (\Delta r)^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = R\Delta R.$$

Elektrické síly tedy vykonají práci

$$\Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i<j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^2} \Delta r_{ij}.$$

Celkovou práci W, kterou elektrické síly vykonají při přemístění nábojů z jedné polohy do druhé, získáme sečtením jednotlivých příspěvků ΔW, které odpovídají „nekonečně“ malým přemístěním. To se provede integrací. Uvažujme nyní soustavu pouze dvou nábojů. Zde známe práci, kterou elektrické síly vykonají při přemístění nábojů z polohy, kdy je jejich vzdálenost R, do nekonečna: $W = (1/4\pi\varepsilon_0)(Q_1Q_2/R)$ (tento výsledek se dostane integrací). Tento vzorec nám umožňuje určit práci W elektrických sil při přemístění nábojů soustavy do nekonečna i v obecném případě

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}}.$$

Tato práce nezávisí na způsobu přemístění nábojů, ale pouze na jejich počáteční vzájemné poloze. To tedy znamená, že existuje potenciální energie tohoto systému, kterou lze zapsat jako

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}} + C = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}} + C,$$

kde C je libovolná konstanta (potenciální energie je určena až na aditivní konstantu). Volbou $C = 0$ dostaneme potenciální energii s nulovou hladinou v nekonečnu.

Karel Kolář

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.