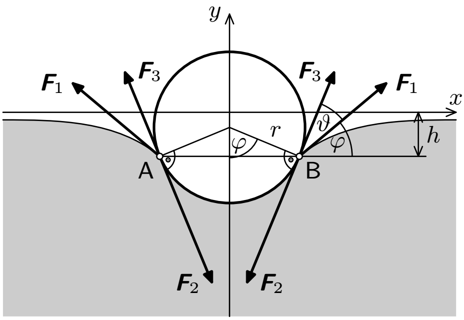
12. ročník, úloha V . 1 ... *jehla na vodě* *(3 body; průměr ?; řešilo 58 studentů)*

Určete maximální průměr ocelové jehly, která se ještě udrží na vodní hladině. Jehla je pokryta tenkým olejovým filmem, aby ji voda nesmáčela. Znáte hustotu oceli, vody a povrchové napětí vody. Pokud řešení problému závisí na délce jehly, pokládejte ji za známou a diskutujte její vliv.



Obr. 1

Jehlu považujme za válec o výšce l a poloměru r, přičemž platí $l \gg r$. Hustotu oceli, z které je jehla vyrobena, označme ϱ_o a hustotu vody ϱ. Povrchová napětí značme: rozhraní voda–vzduch $\sigma_1 = \sigma$, voda–jehla σ_2 a vzduch–jehla σ_3.

Situace, kdy se jehla drží na vodní hladině, je nakreslena na obr. 1 — řez rovinou kolmou na osu jehly. Tíha jehly G je kompenzována výslednicí sil F, kterými na jehlu působí voda a vzduch. Jsou to jednak tlakové síly působící na povrch jehly a jednak povrchové síly působící v bodech A a B. Tlakové síly jsou způsobeny hydrostatickým tlakem a zakřivením rozhraní voda-jehla a vzduch-jehla.

My ukážeme, že výsledek ovlivní podstatně pouze rozhraní voda-vzduch. Z podmínek rovnováhy v bodech A a B lze pro úhel ϑ odvodit

$$F_1 \cos\vartheta + F_3 = F_2 \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1}\,.$$

Příspěvek F_p povrchových sil k celkové výslednici F tedy činí

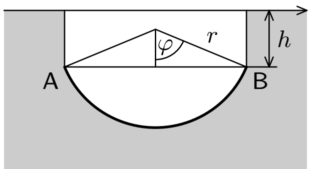
$$F_p = -2F_1 \sin\vartheta \cos\varphi = -2l\sigma_1 \sin\vartheta \cos\varphi\,.$$

Výslednice F_{k1} tlakových sil způsobených zakřivením rozhraní voda–jehla je dána vztahem

$$F_{k1} = 2l\sigma_2 \sin\varphi\,.$$

Podobně lze spočítat i výslednici F_{k2} tlakových sil způsobených zakřivením rozhraní vzduch–jehla

$$F_{k2} = -2l\sigma_3 \sin\varphi\,.$$



Obr. 2

Výslednici hydrostatických tlakových sil působících na jehlu mezi body A a B označme F_h. Tuto sílu je možné spočítat následujícím „trikem“. Uvažme těleso, jehož řez rovinou rovnoběžnou s podstavami je zobrazen na obr. 2. Výsledná vztlaková síla působící na toto těleso je rovna výslednici tlakových sil působících na plochu mezi body A a B. Tato výslednice je však rovna F_h. Pro F_h tedy platí

$$F_h = \left[2hr\sin\varphi + \left(\frac{2\varphi}{2\pi}\pi r^2 - \frac{1}{2}2r\sin\varphi r\cos\varphi\right)\right] l\varrho g\,.$$

Pro výslednou sílu F tak dostáváme vztah

$$\begin{aligned} F &= F_h + F_{k1} + F_{k2} + F_p = \\ &= 2l\left[(\sigma_2 - \sigma_3)\sin\varphi - \sigma_1 \sin\vartheta\cos\varphi\right] + \left[2hr\sin\varphi + r^2\left(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right] l\varrho g\,. \end{aligned}$$

Využijeme-li vztahu pro $\cos\vartheta$, lze předchozí rovnici upravit na následující tvar

$$F = 2l\sigma\sin(\varphi - \vartheta) + \left[2hr\sin\varphi + r^2\left(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right] l\varrho g\,.$$

Z toho vidíme, že rozhraní voda–jehla a vzduch-jehla rovnováhu ovlivňují prostřednictvím úhlu ϑ, v případě, že voda jehlu dokonale nesmáčí ($\varphi = \frac{1}{2}\pi$ a $\vartheta = 0$), rovnováhu neovlivňují vůbec. Síla F je v případě rovnovážné polohy jehly rovna tíze jehly G, která je dána vztahem

$$G = \pi l r^2 \varrho_{\mathrm{o}} g\,.$$

Zbývá ještě určit hodnotu h. Je-li R poloměr křivosti vodní hladiny, potom zakřivení hladiny způsobí v tomto místě tlak, který je roven σ/R. Tento tlak je kompenzován hydrostatickým tlakem. Funkce $y(x)$, která popisuje tvar vodní hladiny, tedy splňuje tuto diferenciální rovnici

$$\frac{\sigma y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = y\varrho g\,.$$

Tato rovnice nezávisí explicitně na x. Položme tedy $z = y(x)$ a $y' = p(z) = p(y(x))$. Funkce $p(z)$ musí řešit rovnici

$$\frac{p'p}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varrho g}{\sigma}\, z\,.$$

Separací proměnných získáme rovnost

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = C - \frac{1}{2}\frac{\varrho g}{\sigma}\, z^2\,.$$

Konstantu C určíme z okrajových podmínek. Pro $y \to 0$ je i $y' \to 0$. To znamená: $z \to 0 \Rightarrow p(z) \to 0$ a tedy $C = 1$. V bodě B platí: $y' = p(-h) = \mathrm{tg}\,(\varphi - \vartheta)$. Dostáváme tak následující vyjádření pro h

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\varrho g}\left[1 - \cos(\varphi - \vartheta)\right]}\,.$$

Z vyjádření h a F plyne, že maximální hodnota síly F nastává pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ a $\vartheta = 0$ (voda jehlu dokonale nesmáčí). Pro maximální poloměr r_m jehly, při kterém se jehla ještě udrží na hladině, platí

$$\pi r_m^2 \varrho_{\mathrm{o}} g = 2\sigma + 2r_m\sqrt{2\sigma\varrho g} + \frac{\pi}{2} r_m^2 \varrho g\,.$$

Vyřešením této rovnice získáme výsledný vztah pro maximální průměr jehly

$$d_m = \frac{4\sqrt{\sigma/g}}{\pi\,(2\varrho_o - \varrho)}\left[\sqrt{2\varrho} + \sqrt{2\pi\varrho_\mathrm{o} - (\pi - 2)\,\varrho}\right].$$

Číselně vychází $d_m = 2{,}0\,\mathrm{mm}$. Pokud bychom neuvažovali hydrostatický tlak, pak by výsledný vzorec vypadal následovně (do předchozího vzorce stačí dosadit $\varrho = 0$)

$$d_m = \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi\varrho_\mathrm{o}g}}\,.$$

Číselně potom vychází $d_m = 1{,}6\,\mathrm{mm}$.

Ve skutečnosti však bude d_m o něco menší, neboť při $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ je jehla v nestabilní poloze (pokud se úhel φ zvětší, potom se jehla definitivně potopí). Pokládáme-li jehlu na vodní hladinu, potom maximální průměr jehly musí být také menší, neboť při úhlech φ blízkých $\frac{1}{2}\pi$ snadno dojde k porušení povrchové vrstvy vody.

Uvedené výsledky platí za předpokladu $l \gg r$. Předměty nazývané jehla tento předpoklad obvykle splňují. Pokud by jevy vznikající na koncích jehly nešlo zanedbat, potom bychom tento problém nemohli převést do roviny a řešení by bylo podstatně komplikovanější.

Závěrem ještě několik slov k došlým řešením. Častou chybou bylo opomenutí faktu, že povrchové síly působí po obou stranách jehly (ve vzorcích chyběly dvojky). Některá řešení (hlavně obrázky) nerespektovala, že povrchové síly mají vždy směr tečný k povrchové bláně. Hodnotu h spočítali pouze dva řešitelé, přičemž jeden z nich chybným postupem dostal kupodivu správný výsledek. Ostatní řešitelé pro vztlakovou sílu (pokud ji uvažovali) většinou používali vyjádření $\frac{1}{2}\pi r^2 l\varrho g$ nebo $\pi r^2 l\varrho g$. Druhý vztah je však obecně chybný. Neumíme-li určit h, potom můžeme pouze říci, že v případě $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je vztlaková síla větší než $\frac{1}{2}\pi r^2 l\varrho g$ $(h > 0)$. Z toho lze potom určit minimální hodnotu d_m.

Karel Kolář

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.