

12. ročník, úloha III. 1 ... plovoucí krychle (4 body; průměr ?; řešilo 63 studentů)

Krychle o hraně a z materiálu o hustotě ρ_t plave v kapalině o hustotě ρ_k . Určete, v jaké poloze se krychle ustálí.

Na začátku bych rád podotkl, že když krychle v kapalině plave (tak to bylo zadáno) tak musí být $\rho_t \leq \rho_k$. V případě $\rho_t = \rho_k$ se bude krychle ve vodě vznášet a může zaujmout jakoukoli polohu. Dále budeme uvažovat pouze $\rho_t < \rho_k$.

Nyní si ujasníme, v jaké poloze se krychle může ustálit. Bude to v každé stabilní rovnovážné poloze. Rovnovážná je taková poloha, kdy výsledná síla i výsledný moment sil působící na krychli je nulový. Stabilní je tehdy, když se navíc těleso po malé výchylce v jakémkoli směru vrátí do původní polohy. Z energetického hlediska je stabilní ta poloha, v níž má potenciální energie tělesa lokální minimum.

Pro krychli plovoucí v kapalině existují 3 rovnovážné polohy

1. horní a dolní podstava je vodorovná,
2. dvě stěnové uhlopříčky jsou svislé (hranou nahoru),
3. jedna tělesová uhlopříčka je svislá (rohem nahoru).

Teď bychom měli rozhodnout, pro jaký poměr hustot ρ_t/ρ_k jsou jednotlivé polohy stabilní. Nepodařilo se mi najít jednoduché řešení tohoto problému (vám také ne), a proto budeme řešit trochu jednodušší případ. Pro daný poměr hustot spočteme potenciální energii všech tří poloh a nejnižší z nich bude jistě odpovídat stabilní poloze (globální extrém je i extrémem lokálním). Místo všech možných stabilních poloh najdeme pouze tu „nejstabilnější“.

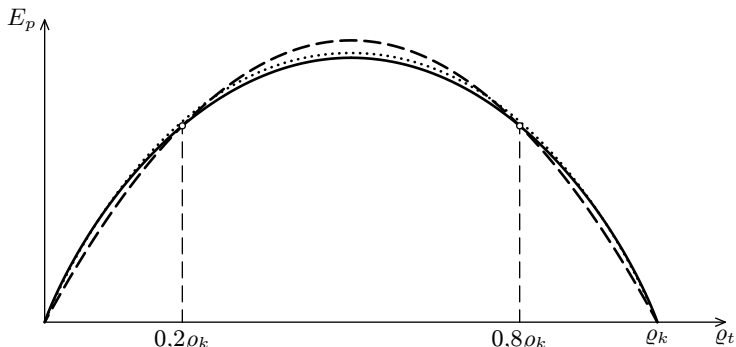
Položme místo nulové potenciální energie i počátek souřadnic na hladinu kapaliny, pak bude potenciální energie plovoucí krychle

$$E_p = mgh - m_k g h_p,$$

kde h je svislá souřadnice těžiště krychle (její geometrický střed), m její hmotnost, m_k je hmotnost kapaliny v díře po tělese a h_p je svislá souřadnice geometrického středu ponořené části. Z Archimedova zákona víme, že $m_k = m$. Potenciální energie je

$$E_p = mg(h - h_p).$$

Uvědomme si, že h_p je vždy záporné.



Obr. 1. Průběhy závislosti $E_p(\rho_t)$ (čárkovaně — poloha 1, tečkovaně — poloha 2, plně — poloha 3)

Uvažujme hustotu kapaliny ϱ_k za konstantní a hustotu krychle budeme měnit v intervalu $\varrho_t \in (0, \varrho_k)$. Průběhy závislosti $E_p(\varrho_t)$ jsou v obrázku 1.

Pro nízké hustoty má nejnižší potenciální energii poloha 1, pro vyšší hustoty poloha 3 a blízko hustoty kapaliny je to opět poloha 1. Průsečík křivek odpovídajících polohám 1 a 3 můžeme vypočítat. Výpočet je ovšem dosti dlouhý a je to spousta geometrie. Vyplývá z něj, že pro hustoty $\varrho_t \in (0; 0,2\varrho_k) \cup (0,8\varrho_k; \varrho_k)$ je stabilní poloha 1 a pro hustoty $\varrho_t \in (0,2\varrho_k; 0,8\varrho_k)$ je stabilní poloha 3.

Václav Porod