

12. ročník, úloha I. 4 ... roztržitý výletník (4 body; průměr ?; řešilo 95 studentů)

Roztržitý výletník zaparkoval své auto na kopci se sklonem $\alpha = 10^\circ$ a zapomněl jej zabrzdít. Jaké maximální rychlosti auto dosáhne? Parametry auta jsou: hmotnost $m = 1200$ kg, výkon $P = 55$ kW, maximální rychlost na rovné silnici $v_{\max} = 140$ km·h⁻¹. Předpokládejte že, odpor automobilu je úměrný druhé mocnině rychlosti.

Pro odporovou sílu platí ze zadání $F_0 = kv^2$, kde k je konstanta úměrnosti. Na nakloněné rovině působí na automobil složka tíhové síly $F'_g = mg \sin \alpha$, která mu uděluje zrychlení. Při dosažení maximální možné rychlosti bude $F_0 = F'_g$ a automobil se bude dále pohybovat rovnoměrně. Pro maximální rychlost tedy dostaneme

$$mg \sin \alpha = kv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k}}.$$

Konstantu k určíme z chování automobilu na rovině. Automobil je urychlován silou $F = P/v$, která bude mít při v_{\max} stejnou velikost jako F_0 a vyjádří se stejně jako při pohybu po rovině, tedy $F_0 = F$

$$kv_{\max}^2 = \frac{P}{v_{\max}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{v_{\max}^3}.$$

Pro hledanou rychlost v máme po dosažení vztah

$$v = \sqrt{\frac{mgv_{\max}^3 \sin \alpha}{P}},$$

po dosažení konkrétních hodnot ze zadání $v = 47$ m·s⁻¹ = 170 km·h⁻¹.

Libor Sedláček