10. ročník, úloha VI . S ... *hmotnost hvězd* *(4 body; průměr ?; řešilo 15 studentů)*

a) *Určete, jak závisí doba života hvězdy na její hmotnosti.*

b) *Vztah (1) nám dovoluje určovat vzdálenosti dvojhvězd a hmotnosti jejich složek. Jako příklad může sloužit dvojhvězda 70 Oph. Měřením bylo zjištěno, že oběžná doba složek dvojhvězdy je $T = 87{,}85$ roku, velká poloosa jejich dráhy má na obloze úhlovou délku $a = 4{,}551''$. Zdánlivé magnitudy složek jsou $m_A = 3{,}93$, $m_B = 5{,}29$. Z těchto údajů vypočtěte vzdálenost systému a hmotnosti jednotlivých složek.*

a) V poslední kapitole jsme si ukázali, že svítivost hvězdy L je úměrná třetí mocnině její hmotnosti $L \sim M^3$. Pro energii E, kterou vyzáří za dobu t, pak můžeme psát $E \sim M^3 t$. Hvězda během svého života získává energii převážně z přeměny jader vodíku na hélium. Zásoba energie E_z je tedy úměrná počtu protonů ve hvězdě, a tím i celkové hmotnosti hvězdy: $E_z \sim M$. Tato zásoba, za předpokladu, že se svítivost hvězdy s časem moc nemění, vystačí na dobu

$$T = E_z/L \sim M/M^3 \sim M^{-2},$$

neboli doba života hvězdy je nepřímo úměrná druhé mocnině její hmoty.

b) V této úloze se vyskytuje celkem pět neznámých: hmotnosti složek dvojhvězdy $\mathcal{M}_A$, $\mathcal{M}_B$, jejich absolutní magnitudy M_A, M_B a vzdálenost dvojhvězdy od Země r. Znalost poslední veličiny nám umožňuje jednoduše určit hodnoty zbývajících čtyř. Absolutní magnitudy složek spočteme z Pogsonovy rovnice (viz úloha I.S) ze známých vizuálních magnitud m_A a m_B

$$M = m + 5 - 5 \log r\,,$$

kde vzdálenost dosazujeme v parsecích. Hmotnosti složek určíme z empirické formule

$$\log \mathcal{M} = 0{,}56 - 0{,}12M\,, \tag{1}$$

zde je hmotnost hvězdy vyjádřena v násobcích hmotnosti Slunce $\mathcal{M}_\odot$. Kombinací obou rovnic obdržíme pro hmotnost hvězdy

$$\mathcal{M} = 10^{-0{,}04-0{,}12m}\, r^{0{,}6}\,. \tag{2}$$

Další vztah mezi vzdáleností dvojhvězdy a hmotnostmi složek plyne ze známého zobecněného III. Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{T^2(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)} = \text{konst.}\,, \tag{3}$$

kde a je velká poloosa oběžné dráhy a T oběžná doba systému. Hodnotu konstanty určíme ze známých veličin a_Z a T_Z pro systém Země–Slunce. Budeme-li dosazovat velkou poloosu v astronomických jednotkách, oběžnou dobu v rocích a hmotnosti složek v násobcích hmotnosti Slunce, je tato konstanta rovna jedné ($a_Z = 1\,\text{AU}$, $T_Z = 1\,\text{rok}$, $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_\odot$, $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}_Z \approx 0$).

Velká poloosa dráhy dvojhvězdy 70 Oph má na obloze úhlovou délku $A = 4{,}551''$. Její skutečnou velikost v astronomických jednotkách dostaneme ze vztahu $a = Ar$, kde za r dosazujeme vzdálenost v parsecích. Tento vztah plyne z definice parseku. (Jeden parsek je vzdálenost, ze které se jeví úsečka délky jedné astronomické jednotky jako úsečka s úhlovou délkou $1''$.) Dosazením do (3) obdržíme hledaný druhý vztah mezi r, $\mathcal{M}_A$ a $\mathcal{M}_B$

$$\frac{(rA)^3}{T^2} = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B \, . \tag{4}$$

Hmotnosti složek vyjádříme z (2) a po úpravě nalezneme

$$r^{2,4} = \frac{T^2}{A^3} \, 10^{-0,04} \left[10^{-0,12 m_A} + 10^{-0,12 m_B} \right] \, . \tag{5}$$

Číselná hodnota vzdálenosti dvojhvězdy 70 Oph je $r = 4{,}77\,\mathrm{pc}$. Hmotnosti složek vypočtené z (2) jsou pak $\mathcal{M}_A = 0{,}79\,\mathcal{M}_\odot$ a $\mathcal{M}_A = 0{,}54\,\mathcal{M}_\odot$.

Alexander Kupčo

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.