10. ročník, úloha III . 1 ... skokan *(4 body; průměr ?; řešilo 74 studentů)*

Člověk padá z můstku do bazénu, přičemž v bazénu je voda a můstek je ve výšce h nad hladinou. Náš skokan má hmotnost $M = 80\,\mathrm{kg}$, hustotu $\varrho = 0{,}9\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, je vysoký $L = 1{,}7\,\mathrm{m}$ a na počátku skoku (volného pádu) byl v klidu. Do jaké největší hloubky H se skokan ponoří? Jaký bude jeho další pohyb? Odpor vodního prostření: a) zanedbejte, b) nezanedbejte.

Na začátku výpočtů si nejprve uvědomme, v jakých časových sledech probíhá celý děj

a) skok z výšky h (volný pád) až po dopad na hladinu,
b) postupné ponořování skokana,
c) pohyb směrem dolů pro již zcela ponořeného skokana až do hloubky ponoření H,
d) pohyb směrem nahoru, dokud je skokan celý ponořen,
e) vynořování; skokan zůstává nakonec částečně vynořen nad hladinou.

Po tomto ujasnění se nyní věnujme rozboru sil, které v bodech b) až e) na skokana působí. Jednak je to hydrostatická vztlaková síla, která působí na každý předmět v kapalině, jednak odporová síla prostředí, která působí proti pohybu skokana díky jeho nenulové rychlosti.

Zanedbáváme odporovou sílu kapaliny

Jelikož nám jde o určení hloubky ponoření H, nemusíme znát časové závislosti veličin charakterizující pohyb. Lze potom užít zákona zachování energie pro skokana, který se nachází v poli gravitační síly. To ovšem předpokládá znalost potenciální energie (E_p) a průběh sil, které konají práci, abychom mohli tyto práce (W_b, W_c) spočíst.

Předpokládáme-li, že skokan bude při skoku stále ve svislé poloze, nemusíme (pro jednoduchost) vztahovat potenciální energii vzhledem k těžišti, nýbrž i vzhledem k patám skokana. Nulovou hladinu potenciální energie stanovme v zatím neznámé hloubce H (tj. od hladiny k patám).

Rozebereme jednotlivé kroky:

a) Skokan má potenciální energii

$$E_p = Mg(h + H)\,.$$

b) Na skokana působí hydrostatická vztlaková síla, která vykoná práci

$$W_b = \int_0^L F_{\mathrm{vz}}\mathrm{d}x\,,$$

kde

$$F_{\mathrm{vz}} = Sx\varrho_k g\,,$$

přičemž S je plošný průřez skokana (zjednodušme ho na tvar kvádru nebo válce), x hloubka, do které je ponořen, ϱ_k hustota vody, g tíhové zrychlení. Integrál je součtem přes všechny elementy práce

$$F_{\mathrm{vz}}\mathrm{d}x$$

na dráze $\mathrm{d}x$, kde je F_{vz} možno pokládat za konstantní.

Integrováním zjistíme, že $W_b = \frac{1}{2}SL^2\varrho_k g$. Tento výpočet lze provést i úvahou, neboť W_b je lineárně závislá na x, takže celkový součet je obsahem trojúhelníku.

c) Zde $F_{\text{vz}} = V\varrho_k g = SL\varrho_k g$ je tedy konstantní. Vykonaná práce na dráze $H - L$ je $W_c = SL\varrho_k g(H - L)$. Sepišme zákon zachování energie

$$E_p = W_b + W_c\,,$$

neboť energie, jakou má skokan, se spotřebuje na brzdění. Z toho po dosazení snadno spočteme

$$H = \frac{h\varrho + \frac{1}{2}\varrho_k L}{\varrho_k - \varrho}\,,$$

uvážíme-li $M = V\varrho = SL\varrho$.

Dosadíme-li hodnotu $h = 10\,\mathrm{m}$, zjistíme, že skokan by se ponořil do hloubky $H = 98{,}5\,\mathrm{m}$, což je zjevný nesmysl, neboť skokan by se utopil, a on se přitom neutopí. Odporová síla tedy bude mít podstatný vliv.

d) Potom se skokan začne vynořovat rovnoměrně zrychleně, dokud je zcela ponořen neboť vztlaková síla je konstantní.

e) Při vynořování nad hladinu bude proces e) probíhat shodně jako b). Skokan má v poloze, kdy „stojí“ na hladině takovou rychlost, že ho vynese do výšky h, což je dáno tím, že energie se nikde neztrácí (nedisipuje), tzn. po zabrzdění je skokan zase urychlován.

Odporovou sílu kapaliny nezanedbáváme

a) Spočteme nejprve rychlost v bodě, kde se dotýká skokan hladiny. Jde o rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením g, tedy

$$h = \frac{gt^2}{2}\,, \qquad v_0 = gt\,.$$

Vyloučením času dostaneme $v_0 = \sqrt{2gh}$.

b) Sepíšeme 2. Newtonův zákon pro zrychlení a skokana. Urychlující síla je tíhová Mg, zpomalující síla vztlaková $F_{\text{vz}} = Sx\varrho_k g$, podobně jako v případě 1b) a odporová síla prostředí (kapaliny) $F_o = \frac{1}{2}CS\varrho_k v^2$. Celkově tedy

$$Mg - Sx\varrho_k g - \frac{1}{2}CS\varrho_k v^2 = Ma\,.$$

Výpočet můžeme provést jednoduchým modelováním třeba i na programovatelné kalkulačce. Jeho myšlenka spočívá v posouvání času, kdy v časovém okamžiku t dopočteme podle naší rovnice a, a pomocí něho spočteme

$$v' = v + a\mathrm{d}t\,,$$

$$x' = x + v\mathrm{d}t + \frac{a\mathrm{d}t^2}{2}\,, \tag{1}$$

předpokládáme-li v dostatečně malém intervalu $(t, t + \mathrm{d}t)$ rovnoměrně zrychlený pohyb.

Hodnoty x', v' jsou již v čase $t + \mathrm{d}t$. Pomocí nich spočteme novou hodnotu a' a postup se opakuje.

V našem případě b) jsou počáteční hodnoty $x = 0$ a $v = v_0 = \sqrt{2gh}$, přičemž výpočet končí v okamžiku, kdy $x \geq 1{,}7\,\mathrm{m}$.

c) Dostáváme podobnou rovnici jako u b). Zde výpočet končí pro nulové (nebo přibližně nulové) hodnoty rychlosti a konečná hodnota x bude hledaná hloubka H.

Dále už jen uvedu rovnice pro bod d) a e)

$$SL(\varrho_k - \varrho)g - \frac{1}{2}CS\varrho_k v^2 = Ma\,,$$

$$-Mg + Sx\varrho_k g - \frac{1}{2}CS\varrho_k v^2 = Ma\,,$$

kde druhá z rovnic vede při řešení ke kmitavému pohybu, který se utlumí.

K vlastní technice výpočtu se sluší dodat, že $\mathrm{d}t$ můžeme zjistit zkusmo a to tak, že dáváme stále menší a menší hodnoty, pokud se výsledky výpočtu od sebe dost liší. Já jsem použil hodnotu $\mathrm{d}t = 0{,}005\,\mathrm{s}$ a odporovou konstantu $C = 1$.

Při výpočtu s menší obměnou vztahu (1)

$$x' = x + \frac{v + v'}{2}\mathrm{d}t$$

jsem se na programovatelné kalkulačce Casio dostal k výsledkům pro

$$h = 10\,\mathrm{m}\,, \qquad H = 6{,}4\,\mathrm{m}\,,$$

$$h = 2\,\mathrm{m}\,, \qquad H = 4{,}7\,\mathrm{m}\,,$$

$$h = 1{,}8\,\mathrm{m}\,, \qquad H = 4{,}6\,\mathrm{m}\,,$$

což je přece jen realističtější výsledek (byť se hodnoty zdají také poněkud velké) než v případě 1).

Michal Hvězda

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.